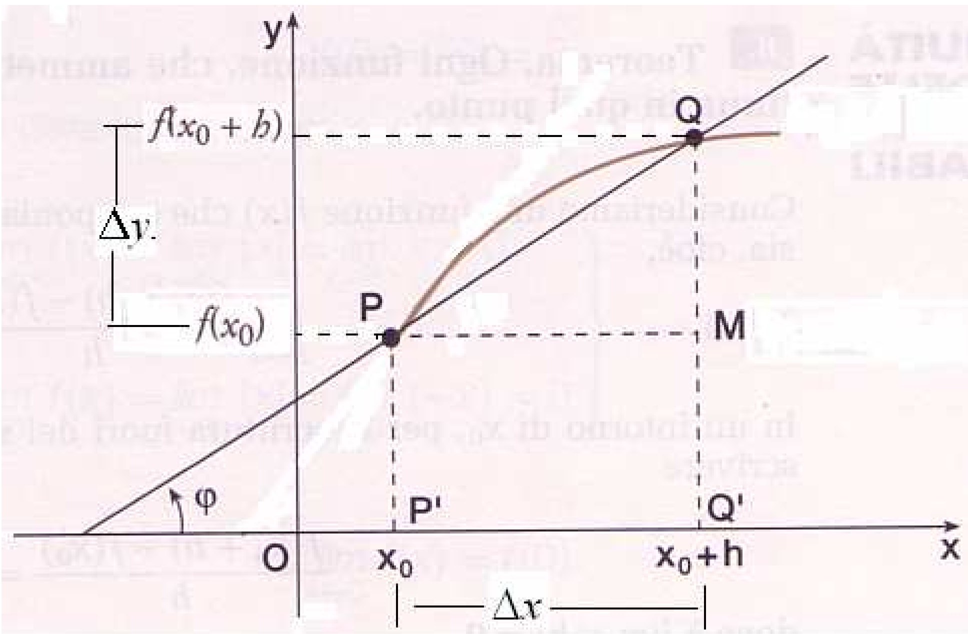
RAPPORTO INCREMENTALE

Consideriamo una funzione di equazione **y = f(x)** definita in un intorno I del punto x_0.
Consideriamo il punto **P** di coordinate (x_0, $f(x_0)$). Se x_0 aumenta di h = Δx, avremo sulla curva il punto **Q** di coordinate (x_0+h, $f(x_0 + h)$) .
La quantità $\overline{P'Q'}$ rappresenta l'incremento h = Δx della variabile indipendente, dato da:
P'Q' = Q'O – P'O , cioè: $\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$; mentre il segmento $\overline{QM}$ rappresenta l'incremento Δf del valore della funzione f, dato da: QM = QQ' – MQ' cioè:
$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$.



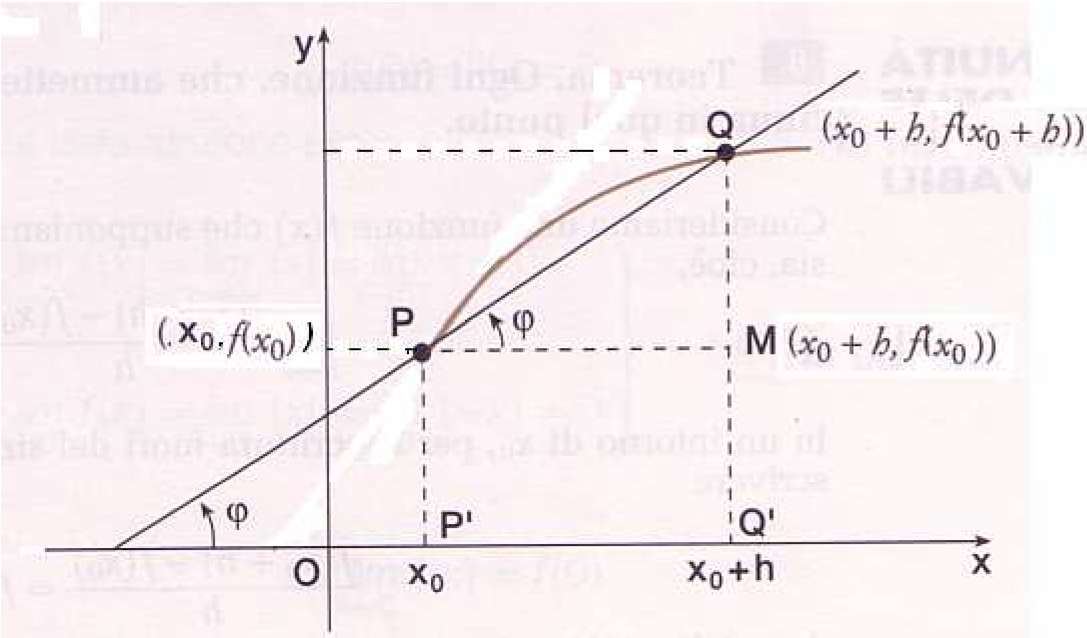
Consideriamo il rapporto: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ in cui abbiamo indicato al denominatore l'incremento della variabile indipendente x, ed al numeratore l'incremento corrispondente della funzione; tale rapporto è detto **rapporto incrementale** *della funzione f(x) relativo al punto x_0 ed all'incremento h*.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

In definitiva, si chiama rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ della funzione f(x), relativo al punto x_0 ed all'incremento h, il rapporto tra l'incremento del valore della funzione ottenuto in base all'incremento della variabile indipendente.

SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL RAPPORTO INCREMENTALE

Rappresentiamo in un piano cartesiano il grafico di **y = f(x)** e siano **P** e **Q** i punti di tale grafico di ascisse rispettivamente $\mathbf{x_0}$ e $(\mathbf{x_0} + \mathbf{h})$. Prendiamo in esame la retta passante per i punti P e Q.



Tale retta, secante alla funzione data, formerà con l'asse delle x un angolo φ.

Il coefficiente angolare di tale retta secante è: $\mathbf{m_{PQ}} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$ (1)

N.B.

L'equazione della retta passante per due punti **A** $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1})$ e **B** $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})$ è : $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

che possiamo anche scrivere : $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ o anche: $y - y_1 = m(x - x_1)$ dove

m $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ è il **coefficiente angolare**

(rapporto tra la differenza delle ordinate e la differenza delle ascisse)

Si ha che : $y_Q - y_P = \Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)$.

$x_Q - x_P = \Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$

Perciò, sostituendo nella (1) si può scrivere: $\mathbf{m_{PQ}} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

cioè il **rapporto incrementale** è uguale al **coefficiente angolare della retta secante** il grafico di y = f(x) nei suoi punti di ascissa $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0} + \mathbf{h}$

Consideriamo il triangolo rettangolo QMP che si viene a formare; l'asse x e la retta PM, essendo rette parallele tagliate dalla trasversale PQ, avranno angoli corrispondenti uguali, per cui anche l'angolo MPQ varrà φ.

Nel triangolo rettangolo QMP si ha che: **tg**$\varphi = \dfrac{QM}{PM} = \dfrac{y_Q - y_M}{x_M - x_P} = \dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} =$ $\mathbf{m_{PQ}}$

ossia:

il **rapporto incrementale** è uguale alla **tangente goniometrica dell'angolo** formato dal semiasse positivo delle ascisse e dalla secante il grafico di y = f(x) passante per i suoi punti di ascissa $\mathbf{x_0}$ e $\mathbf{x_0 + h}$.

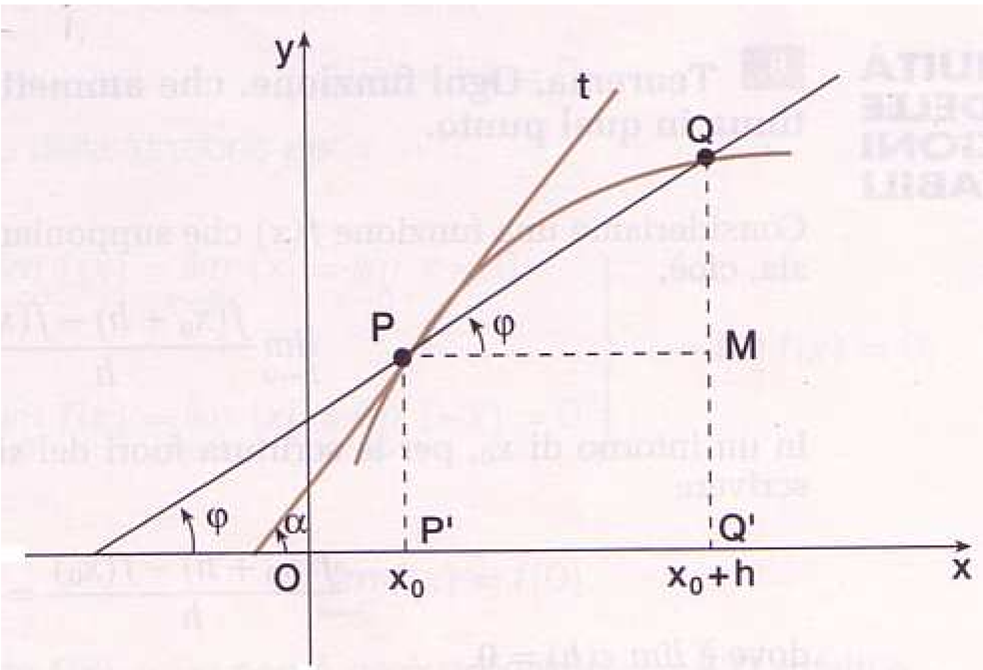
SIGNIFICATO GEOMETRICO DI DERIVATA

Supponiamo che f(x) sia derivabile in x_0, cioè supponiamo che esista finito il $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Sappiamo che: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ = **f'(x_0)**

Ora, se facciamo tendere h a zero, ossia se attribuiamo ad h valori sempre più piccoli, il punto Q si avvicinerà sempre più a P e la posizione della retta secante PQ tenderà ad avvicinarsi sempre più a quella della retta **t** tangente al grafico di y = f(x) nel punto P di ascissa x_0.
Il coefficiente angolare della secante PQ, che come già detto, è il rapporto incrementale

$$\mathbf{m_{PQ}} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$



tenderà, perciò, ad avvicinarsi sempre più al coefficiente angolare $\mathbf{m_t}$ della tangente geometrica **t**, ossia si avrà che:

Quando Q → P si avrà che: $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} m_{PQ} = \mathbf{m_t}$

Ma il limite ora scritto è, nella ipotesi fatta, la derivata **f'(x_0)** : si ha perciò: **f'(x_0) = $\mathbf{m_t}$ = tg α**

La derivata di una funzione in un punto x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f(x) nel suo punto di ascissa x_0, o anche la derivata di una funzione in un punto x_0 è la tangente goniometrica dell'angolo formato dalla retta tangente al grafico di f(x) nel suo punto di ascissa x0 con il semiasse delle ascisse positive: