RAPPORTO INCREMENTALE

Consideriamo il rapporto: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ in cui abbiamo indicato al denominatore l'incremento della variabile indipendente x, ed al numeratore l'incremento corrispondente della funzione; tale rapporto è detto **rapporto incrementale** *della funzione f(x) relativo al punto x_0 ed all'incremento h.*

Si chiama rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ della funzione f(x), relativo al punto x_0 ed all'incremento h, il rapporto tra l'incremento del valore della funzione ottenuto in base all'incremento della variabile indipendente.

Consideriamo la funzione $f : R \rightarrow R$ definita da: **f(x) = 3x.**

Sia $x_0 = 4$. Diamo ad x_0 un incremento: h = 2
(otteniamo così:
$x_0 + h = 4+2 = 6$)

All'incremento $h = \Delta x = 2$ corrisponde un incremento Δf del valore della funzione f, pari a:

$f(x_0) = f(4) = 12$

$f(x_0 + h) = f(6) = 18$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = 18 - 12 = 6$

Il rapporto incrementale é:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{(x_0+h) - x_0} = \frac{18-12}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

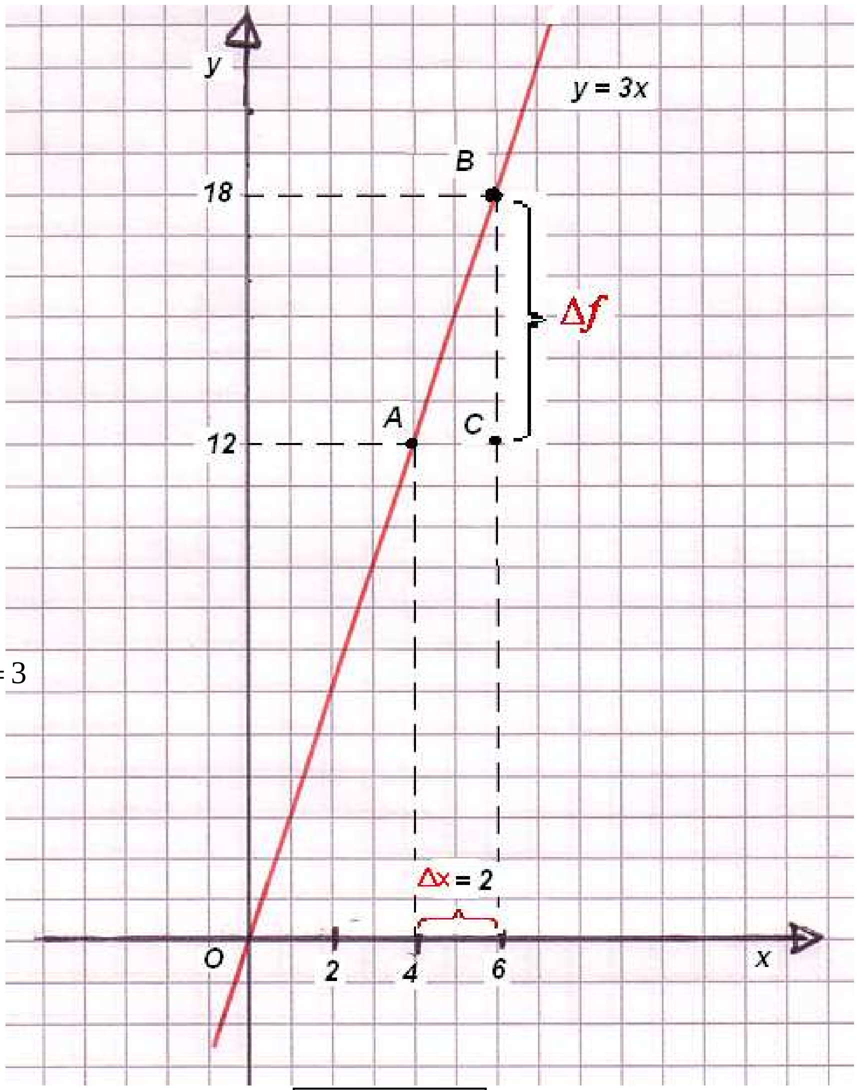

Fig. 1

Esempi:

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: $f(x) = x^2 - 2$ relativo al punto $x_0 = 1$ ed all'incremento $h = 2$.

$f(x_0) = f(1) = (1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1$

$f(x_0 + h) = f(1 + 2) = f(3)=3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = 7 - (-1) = 7 + 1 = 8$

$\Delta x = h = 2$

Il rapporto incrementale é: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \dfrac{8}{2} = 4$

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ relativo al punto $x_0 = 2$ ed all'incremento $h = 1$.

$f(x_0) = f(2) = (2)^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$

$f(x_0 + h) = f(2 + 1) = f(3) = 3^2 - 4(3) + 1 = 9 - 12 + 1 = -2$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = -2 - (-3) = -2 + 3 = +1$

$\Delta x = h = 1$

Il rapporto incrementale é: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \dfrac{1}{1} = 1$

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: $f(x) = x^2 - 2x + 3$ relativo al punto $x_0 = 2$ ed all'incremento $h = 3$.

$f(x_0) = f(2) = (2)^2 - 2(2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3$

$f(x_0 + h) = f(2 + 3) = f(5) = 5^2 - 2(5) + 3 = 25 - 10 + 3 = 18$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = 18 - 3 = 15$

$\Delta x = h = 3$

Il rapporto incrementale é: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \dfrac{15}{3} = 5$

Altri esempi:

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: f(x) = $x^2 - 3x + 1$ relativo al punto $x_0 = 1$ ed all'incremento h generico.

$f(x_0) = f(1) = (1)^2 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$f(x_0 + h) = f(1 + h) = (1 + h)^2 -3(1 + h) + 1 = 1^2 + h^2 + 2h - 3 - 3h + 1 = h^2 - h - 1$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = (h^2 - 3h - 1) - (-1) = h^2 - h$

$\Delta x = h$

Il rapporto incrementale é: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{h^2 - h}{h} = \frac{h(h-1)}{h} = h - 1$

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: f(x) = $x^2 + 2$ relativo al punto $x_0 = 2$ ed all'incremento h.

$f(x_0) = f(2) = 2^2 + 2 = 6$

$f(x_0 + h) = f(2 + h) = (2 + h)^2 + 2 = 2^2 + h^2 + 4h + 2 = h^2 + 4h + 6$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = (h^2 + 4h + 6) - 6 = h^2 + 4h$

$\Delta x = h$

Il rapporto incrementale é: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{h^2 + 4h}{h} = \frac{h(h+4)}{h} = h + 4$

- Calcolare il rapporto incrementale della funzione: f(x) = $\sqrt{x-3}$ relativo al punto $x_0 = 3$ e ad un generico incremento h

$f(x_0) = f(3) = \sqrt{3-3} = 0$

$f(x_0 + h) = f(3 + h) = \sqrt{3+h-3} = \sqrt{h}$

$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = \sqrt{h} - 0 = \sqrt{h}$

$\Delta x = h$

Il rapporto incrementale é: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{\sqrt{h}}{h} =$

Significato geometrico del rapporto incrementale

Riprendiamo nuovamente la rappresentazione grafica della funzione: **f(x) = 3x Vedi fig. (1)**

Consideriamo il triangolo **CAB** rettangolo in $\widehat{C}$.

La tangente dell'angolo $\widehat{CAB}$ è data da: $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$

Ora, $\overline{BC}$ = $f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta f$ mentre è: $\overline{AC}$ = **$(x_0+h) - x_0 = h$**

Per cui, si conclude: **la tangente trigonometrica dell'angolo $\widehat{CAB}$ non è altro che il valore del rapporto incrementale**

$$\operatorname{tang}\widehat{CAB} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_{0)}}{h}$$

N.B.

La tang $\widehat{CAB}$ non è altro che la pendenza della retta y = 3x , cioè il suo coefficiente angolare.